



# Microfinance, accompagnement des demandeurs de crédits : une analyse économique des contrats alternatifs

By/Par | **Lansana Bangoura<sup>1</sup> Didier Hounwanou<sup>2</sup>**

1. ISTIA - Département: Innovation, Laboratoire (ESO-UMR-CNRS, Université d'Angers), chercheur associé au CIAPHS - Université Rennes 2 et au CRESE - Université Franche Comté. [labangoura@gmail.com](mailto:labangoura@gmail.com) / [lansana.bangoura@univ-angers.fr](mailto:lansana.bangoura@univ-angers.fr)
2. Chercheur affilié au CRESE (Centre de Recherches sur les Stratégies Economiques), [didier.hounwanou@univ-fcomte.fr](mailto:didier.hounwanou@univ-fcomte.fr)

## ABSTRACT

In this paper, we analyze the structure of the microfinance credit agreements in the presence of a double asymmetry of information on human capital and effort of the beneficiaries of loans. We study the impact of the accompaniment of project leaders on allocative efficiency and the repayment of loans. We find that in the absence of support, the risk of failure of the investment project is high enough and the increase in the interest rate as an adjustment variable discourages investment and amplifies discrimination access to credit. We also show that when the support is implied the risk of the investment project decreases and thus there is no risk transfer as part of the training and accompaniment of borrowers.

keywords: Microfinance, information asymmetry; training; discrimination; incentive contracts.

## RÉSUMÉ

Dans cet article, nous analysons la structure des contrats de crédits en microfinance en présence d'une double asymétrie d'information sur le capital humain et sur l'effort des demandeurs de microcrédits. Nous étudions l'impact de l'accompagnement des porteurs de projets sur l'efficacité allocative et sur le remboursement des prêts. Nous trouvons qu'en l'absence d'accompagnement, le risque lié à l'échec du projet d'investissement est suffisamment élevé et l'accroissement du taux d'intérêt comme variable d'ajustement décourage l'investissement et amplifie la discrimination pour l'accès au crédit. Nous montrons également que lorsque l'accompagnement est tacite le risque lié au projet d'investissement diminue et donc qu'il n'y a pas de transfert de risque dans le cadre de la formation et de l'accompagnement des emprunteurs.

Mots clefs : *Microfinance, asymétrie d'information ; formation ; discrimination ; contrats incitatifs.*

JEL : D 41, D 82, G 21

## INTRODUCTION

Depuis quelques années, la microfinance connaît un développement fulgurant grâce au soutien des organismes internationaux<sup>1</sup> qui en font un outil de lutte contre la pauvreté. D'après le sommet de la microfinance, le nombre de clients des institutions de microfinance est passé de 13 millions en 1997 à 205 millions en 2010. Si l'accès des pauvres au microcrédit s'est également accru sur cette même période (ils sont passés de 8 millions en 1997 à 138 millions en 2010), le taux de couverture des familles pauvres reste faible à travers le monde (11,2% en Afrique et au Moyen Orient, 32,4% en Amérique Latine et aux Caraïbes et 3,7% en Europe de l'Est et en Asie Centrale) en dehors de l'Asie où il s'établit à 68,8%<sup>2</sup>. De nombreux travaux théoriques et empiriques sont consacrés aux microcrédits pour analyser les contrats de crédits optimaux, les types de contrats proposés aux différents clients, et étudier les conditions d'octroi de crédit. D'après la littérature, différentes raisons expliquent l'accès limité des ménages pauvres aux microcrédits (Banerjee, Duflo, et al., 2015 ; Morduch, 2000 ; Guerin et al., 2007; Servet, 2006 ; Blondeau, 2006 ; Rahman, 1999). Les travaux récents ont mis en évidence l'insuffisance des garanties apportées par les ménages pauvres par rapport au collatéral requis par les institutions de microfinance, la faiblesse du capital humain de ces derniers ainsi que la discrimination par rapport au genre (Guérin, 2009; Hashemi, Schuler, et al., 1996; Emran, Stiglitz et al., 2011; Labie et al., 2010).

L'objet de cette étude porte sur l'amélioration de l'accès au crédit des personnes « peu qualifiées » grâce à un service d'accompagnement entrepreneurial. Nous voulons montrer qu'un contrat alternatif permettrait d'améliorer le taux de couverture des populations pauvres, supposées « risquées » et exclues du marché à cause des critères requis par les IMF. L'expérience péruvienne de l'accompagnement des demandeurs de crédit (Karlan et Valdivia, (2011); Valdivia et Frisancho, (2008)) a montré une amélioration du taux de remboursement du crédit de la part des clients ayant bénéficié de ce service d'accompagnement ainsi que leur taux de maintien dans l'IMF. Cependant, le processus d'accompagnement n'est pas systématique à toutes les IMF. McKenzie et Woodruff (2012) ont analysé l'administration de ce service aux emprunteurs. Ils trouvent que ce service d'accompagnement est offert à tous les clients par les IMF dans le cadre de leurs réunions régulières de groupe (Karlan et Valdivia, 2011; puis Berge et al., (2011)). En revanche, pour Bruhn et Zia (2012), le service d'accompagnement est optionnel.

Sur le plan théorique, Barry et Bruno (2008) ont étudié l'impact du « mentoring » sur l'accès des demandeurs de crédits disposant de projets rentables et ayant une faible qualification. Ils montrent que ce service peut améliorer l'accessibilité de ce type de porteurs de projets au financement. Néanmoins, ils trouvent que ce service fourni par l'IMF fait augmenter le taux d'intérêt avec pour conséquence, l'augmentation des projets peu rentables financés. Le cadre de notre étude diffère de celui de Barry et Bruno (2008) en différents points : leur étude s'inscrit dans le processus de financement de microcrédits dans les pays développés et de ce fait, ne prend pas en compte les spécificités des pays en développement.

---

<sup>1</sup> La Banque Mondiale, Le PNUD

<sup>2</sup> Rapport du Sommet du Microcrédit (2012)

En effet, les femmes représentant 70% des clients des IMF (Daley-Harris, 2009), ont la réputation de compenser l'insuffisance de la garantie matérielle (collatérale) par une garantie morale (Sambe, 1997). Nous étudions les contrats optimaux avec la prise en compte de l'effort de remboursement de ces populations. Ce dernier détermine les projets d'investissement. Contrairement à Barry et Bruno (2008), l'effort est un signal par rapport au type de l'agent (l'emprunteur) et non le coût d'opportunité lié à l'investissement.

Notre méthodologie consiste à résoudre un modèle de discrimination par l'effort avec la prise en compte de l'acceptation ou non du service d'accompagnement entrepreneurial par le demandeur de crédit. Nous caractériserons le contrat optimal avec la détermination de la taille du crédit, du taux d'intérêt et du collatéral, en l'absence et en présence de l'accompagnement.

## 1. LE MODÈLE

On considère un marché de crédit comprenant deux types d'agents : les emprunteurs  $\beta_i$  ( $\beta_H$  pour un niveau de qualification élevé qu'il s'agisse d'un homme ou d'une femme et  $\beta_L$  pour un niveau de qualification faible qu'il s'agisse d'un homme ou d'une femme), les institutions de microfinance qui financent les projets portés par les emprunteurs. Nous supposons qu'il y a une proportion  $\theta$  d'emprunteurs qualifiés et  $1-\theta$  d'emprunteurs non qualifiés. Tous les agents sont supposés neutres à l'égard du risque, et chaque emprunteur possède un projet d'investissement dont le financement est assuré exclusivement par un crédit. Un emprunteur de type  $\beta_i \in \{\beta_L, \beta_H\}$  peut investir un montant  $I$  dans un projet qui génère un revenu aléatoire  $Y(I)$ . La probabilité que le projet réussisse dépend de l'effort  $e_i$  de l'emprunteur avec  $e_i \in [0,1]$  et de son niveau de qualification qui sont non observables par l'IMF. Nous supposons que le niveau de qualification améliore la réussite du projet. Ainsi, nous considérons un facteur d'influence  $\gamma_i \in \{\gamma_L, \gamma_H\}$  où  $\gamma_H \geq 1$  représente un facteur d'amélioration de la réussite du projet pour un emprunteur qualifié (de type  $\beta_H$ ) tel que la probabilité de réussite du projet lorsqu'il exerce un effort  $e_i$  est  $\gamma_H e_i$  avec  $\gamma_H e_i \leq 1$ . Pour un emprunteur non qualifié (de type  $\beta_L$ ) effectuant un effort  $e_i$ , la probabilité de réussite de son projet est  $\gamma_L e_i$  avec  $\gamma_L e_i < 1$  où  $\gamma_L \leq 1/2$  représente un facteur captant le risque lié à l'insuffisance de compétences dans le projet. Dans ce contexte, l'emprunteur supporte un coût de l'effort  $\varphi(e_i, \beta_i)$  correspondant à l'effort  $e_i$  lorsque son type est  $\beta_i$  avec  $\varphi'(\cdot) > 0$  et  $\varphi''(\cdot) > 0$ . La distribution du rendement du projet est donnée par :

$$\tilde{Y}_i(I) = \begin{cases} Y_i(I) & \text{avec } \theta \gamma_i \\ 0 & \text{avec } (1-\theta) \gamma_i \end{cases} \quad (1)$$

On suppose que <sup>3</sup>:

$$0 < e_h < e_f < 1, \quad (2)$$

<sup>3</sup> D'après les études empiriques, les femmes remboursent mieux que les hommes.

$$Y_i(0) = 0, Y'_i(0) = \infty, Y'_i(\infty) = 0, Y'_i(I) > 0, Y''_i(I) < 0, \forall I \in (0, \infty), i = f, h. \quad (3)$$

De plus, pour tout volume d'investissement donné, les rendements espérés pour une femme et un homme sont identiques :

$$e_f Y_f(I) = e_h Y_h(I), \forall I \in [0, \infty[. \quad (4)$$

En utilisant la condition (2), l'équation (4) implique que les hommes investissent davantage dans des projets plus risqués que les femmes. Cette condition est analogue à celle de Rothschild et Stiglitz (1970). Les femmes étant moins risquée que les hommes, leur proportion dans la population est notée  $\mu$ . On suppose que chaque agent dispose d'une richesse à la fin du projet dont la valeur monétaire est dénotée par  $W > 0$ .

On suppose que l'IMF est neutre à l'égard du risque et le coût du capital  $r_0 \neq 0$ . Soit  $r_i$  le taux d'intérêt pratiqué sur un prêt, avec  $r_i > r_0$ , et  $c_i \geq 0$  le montant du collatéral exigé par les IMF, et  $k_i$ , le coût de la formation supporté par l'IMF.

Le déroulement du jeu est le suivant:

- En  $t = 0$ , la nature révèle le type à l'emprunteur qui peut être soit hautement qualifié ( $\beta_H$ ), soit faiblement qualifié ( $\beta_L$ ).
- En  $t = 1$ , l'IMF propose les contrats de prêts.
- En  $t = 2$ , les emprunteurs acceptent ou refusent les contrats proposés par l'IMF.
- En  $t = 3$ , l'emprunteur qui accepte les contrats de crédits, reçoit les fonds et exerce l'effort pour mettre en œuvre son projet et réalise le rendement.
- En  $t = 4$ , l'emprunteur rembourse l'IMF compte tenu du rendement du projet.

L'espérance d'utilité d'un agent de type  $\beta_i$  qui accepte le contrat est telle que :

$$U_i(I_i, r_i, c_i) = \gamma_i e_i [Y_i(I_i) - (1 + r_i)I_i + W] + \gamma_i (1 - e_i) [W - c_i] - \varphi(e_i) \quad (5)$$

Dans cette relation, le premier terme représente le revenu espéré de l'entrepreneur  $i$ , qualifié ou non, lorsque son projet réussit ; le deuxième terme représente son revenu espéré lorsque le projet échoue et le troisième terme représente la désutilité de l'effort.

En supposant que les IMF soient neutres au risque, l'espérance de profit pour une IMF offrant un contrat  $V_i^{\beta_i}(I, r, c)$  à l'agent  $i$  est donnée par :

$$E\pi_i(I_i, r_i, c_i) = \lambda_i e_i (1 + r_i)I + \lambda_i (1 - e_i)c_i - I(1 + r_0) \quad (6)$$

Etant donné que les emprunteurs qualifiés reçoivent un contrat  $V_H(I_i, r_i, c_i)$  et les emprunteurs faiblement qualifiés reçoivent un contrat  $V_L(I_i, r_i, c_i)$  l'espérance de profit globale de l'IMF s'écrit :

$$EG(V_f^L, V_f^H, V_h^L, V_h^H) = \theta [\mu \pi(V_f^H(I, r, c)) + (1 - \mu) \pi_h(V_h^H(I, r, c))] + (1 - \theta) [\mu \pi_f(V_f^L(I, r, c)) + (1 - \mu) \pi_h(V_h^L(I, r, c))] \quad (7)$$

Dans la suite de cet article, nous allons supposer que les fonds prêtables ne sont pas rares, c'est-à-dire que les IMF peuvent financer tous les projets d'investissement quelle que soit la taille du prêt<sup>4</sup>. Avant la caractérisation des contrats d'équilibre, il est d'usage d'analyser les préférences des entrepreneurs et des IMF concernant les contrats de prêt en calculant les taux marginaux de substitution (TMS) entre les paramètres du contrat. D'après l'équation (5), pour un agent de type  $i$ , le TMS entre le taux d'intérêt  $r$  et la taille du crédit  $I$  spécifiés dans le contrat  $V = (I, r, c)$  est donné par :

$$\sigma^i(V/r_i) = -\frac{Y'_i(I) - (1+r)}{I}, \quad \forall_i \in \{L, H\} \quad (8)$$

Il faut noter que  $e_f > e_h$  et que l'équation (4) implique que  $Y'_h(I) > Y'_f(I)$ , pour tout  $I > 0$ . Ainsi, d'après l'équation (8),  $\sigma^h(V|c) > \sigma^f(V|c)$  c'est-à-dire que l'homme est plus désireux que la femme de payer un taux d'intérêt plus élevé si l'IMF augmente la taille du crédit.

Le TMS pour l'agent de type  $i$  (avec  $i = f, h$ ) entre le collatéral et le taux d'intérêt est donné par :

$$\sigma^i(V|c_i) = \frac{e_i}{1-e_i} I, \text{ (quels que soient le genre et le niveau de qualification),} \quad (9)$$

Il faut noter que  $Y_h(I) > Y_f(I)$  pour tout  $I > 0$ . La relation  $e_f > e_h$  implique que  $\sigma^h(V|c_i) > \sigma^f(V|c_i)$  tient pour tout volume positif d'investissement et tout collatéral requis tel que  $0 \leq c \leq W$ . Cela veut dire donc qu'un entrepreneur muni d'un projet risqué (l'homme) est moins disposé que la femme à accepter une augmentation du collatéral si le taux d'intérêt a baissé. Pour un contrat  $V = (I, r, c)$ , les TMS de l'IMF sont obtenus à partir de la relation (6). On a :

$$\sigma^{IMF}(V|c) = \frac{(1+r_0)/\lambda_i e_i - (1+r)}{I} \text{ et } \sigma^{IMF}(V|I) = -\frac{e_i}{1-e_i} I \quad (10)$$

La comparaison des TMS entre le taux d'intérêt et la taille du crédit des deux catégories d'agents (entrepreneurs et IMF) montre qu'ils s'égalisent lorsque  $Y'_i(I) = (1+r_0)/\lambda_i e_i$ , c'est-à-dire lorsque le revenu marginal de l'investissement est égal à son coût marginal. D'autre part, les TMS entre le taux d'intérêt et le collatéral des deux catégories d'agents coïncident si et seulement si,  $Y_i(I) - (1+r)I + c - \phi'(e) = 0$ . Cela veut dire que le contrat

<sup>4</sup> Cette hypothèse signifie qu'il est efficace de financer tous les projets d'investissement en ce sens que : il existe un volume d'investissement  $I > 0$  tel que le rendement espéré sur l'investissement  $e_i Y_i(I)$  soit supérieur au coût social de l'investissement  $I$  pour  $i \in \{h, f\}$ . En fixant la taille du prêt à un certain niveau positif, notre modèle est proche des modèles développés par Bester (1987) et Hellwig (1988). Les résultats de ces deux modèles s'appliquent aussi dans le cadre de notre analyse.

de prêt fournit une assurance complète à l'entrepreneur par rapport au rendement de son projet<sup>5</sup>.

Avant de caractériser les contrats de crédits sur un marché avec information asymétrique, l'équilibre en information parfaite peut être présenté comme un cadre de référence. Comme les types d'agents sont identifiables ex ante, les IMF font donc face à deux marchés du crédit distincts. Pour caractériser les contrats optimaux entre les agents, nous envisagerons deux situations : nous caractérisons les contrats optimaux en l'absence d'accompagnement des emprunteurs, ensuite avec leur accompagnement.

## 2. RÉOLUTION DU MODÈLE

### 2.1. Les contrats d'équilibre sans accompagnement

Dans les pays en développement, la plupart des IMF finance les projets des populations pour plusieurs activités sans établir la cohérence entre le profil de l'emprunteur et le projet d'investissement. L'analyse de cette situation permet d'appréhender le cadre général du fonctionnement du crédit dans le secteur de la microfinance dans ces pays. Nous analysons les contrats optimaux en information parfaite.

L'équilibre sur un marché du crédit avec information parfaite est un menu de contrats  $(V_f^L, V_f^H, V_h^L, V_h^H)$  tel que :

$$EG(V_f^L, V_f^H, V_h^L, V_h^H) = \theta[\mu\pi(V_f^H) + (1-\mu)\pi_h(V_h^H)] + (1-\theta)[\mu\pi_f(V_f^L) + (1-\mu)\pi_h(V_h^L)] \geq 0$$

et il n'existe aucun contrat de crédit  $(V_a^{\beta_i}, V_b^{\beta_i})$  avec  $\beta_i \in \{\beta_L, \beta_H\}$  qui donne des profits espérés positifs à une IMF offrant un contrat  $V_a^{\beta_i}, V_b^{\beta_i}$  en plus de  $(V_f^L, V_f^H, V_h^L, V_h^H)$ .

Sur chaque marché, un contrat de crédit optimal  $V_i^{\beta_i}$  maximise l'utilité espérée de l'emprunteur  $i$  sous la condition de profit nul,  $E\pi_i(V_i) = 0$ . Un équilibre concurrentiel  $V_i^* = (I_i^*, r_i^*, c_i^*)$  pour  $i = L, H$  est solution du programme suivant :

$$\begin{cases} \max_{I_i, r_i, c_i} U_i(I_i, r_i, c_i) \\ s.c \\ E\pi_i(I_i, r_i, c_i) = 0, \\ (1+r_i)I_i \geq c_i \geq 0 \\ Y_i(I) - (1+r)I + c - \varphi'(e) = 0 \end{cases}$$

**Proposition 1:** *Un équilibre sur un marché du crédit concurrentiel en information parfaite est caractérisé par les contrats suivants :*

<sup>5</sup> De façon triviale, le contrat  $V(0,0,0)$  est le seul contrat de prêt qui fournit une assurance complète et acceptable aux entrepreneurs.

$$V_i^* = (I_i^*, r_i^*, c_i^*) = (Y_i'^{-1}(\frac{1+r_0}{e_i}), \frac{1+r_0}{e_i}, 0), \text{ pour } i = f, h. \quad (11)$$

où le niveau de l'effort  $e^*$  est solution de l'équation

$$\varphi'(e_i) = Y_i(I) - (1+r_i) \quad (12)$$

Cette équation exprime que le coût marginal de l'effort est égal au rendement du projet moins le coût du financement (le taux d'intérêt).

**Preuve** (Voir annexe).

En information parfaite, tous les bons projets sont financés et il n'existe pas de collatéral. Le rendement marginal de l'investissement est égal au coût social marginal. Nous avons par conséquent un équilibre efficace. De plus, le taux d'intérêt est défini en fonction de l'effort. Les agents qui fournissent un effort élevé bénéficient d'un taux d'intérêt moins élevé ou faible.

## 2.2. Les contrats d'équilibre avec accompagnement

Les asymétries d'informations sur le marché de crédit amènent les établissements de crédit à rationner les demandes de crédit. Ce rationnement limite l'accès des personnes de conditions modestes (faible qualification, insuffisance de ressources matérielles etc.). Le risque de crédit inhérent aux conditions de ces personnes peut être réduit par la proposition d'un contrat alternatif à travers lequel l'IMF offrirait une formation accompagnant le projet d'investissement. Il s'agit de déterminer les contrats optimaux,  $V_i(I, r, c, e, \beta)$ , en présence d'une double asymétrie d'information (la qualification de l'emprunteur et l'effort dans la mise œuvre du projet). Pour caractériser les contrats optimaux, nous allons analyser la situation lorsque les IMF accompagnent systématiquement les emprunteurs. Comme le type de l'emprunteur (qualification élevée ou qualification faible) influence la probabilité de réussite du projet et ce dernier n'est pas observable par l'établissement de microcrédit ou l'IMF, une première solution consiste à offrir des contrats avec accompagnement. Nous allons donc caractériser les contrats optimaux,  $V_i(I, r, c, e)$ , qui génèrent l'auto-sélection des demandeurs de crédit en fonction de leur effort. Sous l'hypothèse de marché de crédits concurrentiel, les bénéfices des IMF s'annulent à l'équilibre et les contrats doivent être incitatifs.

L'utilité d'un emprunteur acceptant un contrat  $V_i^{\beta_H}(I, r, c)$  est donnée par :

$$U_i(I_i, r_i, c_i) = \lambda_i e_i [Y_i(I_i) - (1+r_i)I_i + W] + \lambda_i (1-e_i)[W - c_i] - \varphi(e_i) \quad (13)$$

Lorsque les contrats sont incitatifs, ils doivent satisfaire les contraintes suivantes :

$$U_f(V_f^{\beta_H}) \geq U_f(V_h^{\beta_H})$$

$$U_h(V_h^{\beta_H}) \geq U_h(V_f^{\beta_H})$$

Par ces contraintes, nous supposons que l'IMF trouve important de toujours inciter les emprunteurs « femmes » et « hommes » à fournir l'effort élevé. Ce qui signifie que l'utilité espérée d'une femme formée qui choisit de fournir un effort élevé doit être supérieure à l'utilité espérée d'une femme formée qui choisit de fournir un effort faible. Dans la première hypothèse ou situation, l'effort plus l'accompagnement diminue le risque de l'échec du projet. En d'autres termes, la probabilité de remboursement du prêt est supérieure à celle qui caractériserait le projet si elle choisissait d'exercer un effort faible.

Le profit espéré par une IMF offrant un contrat  $V_i^{\beta_H}(I, r, c)$  est la suivante :

$$E\pi_i(I_i, r_i, c_i) = \lambda_i e_i (1 + r_i) I + \lambda_i (1 - e_i) c_i - [I(1 + r_0) + k]. \quad (14)$$

Dans cette relation, le premier terme représente le paiement reçu par l'IMF lorsque le projet réussit, le deuxième représente le paiement lorsque le projet échoue et le troisième terme représente le coût du financement pour l'IMF c'est-à-dire le coût du capital plus le coût de la formation de l'emprunteur. Tout menu de contrats incitatifs  $(V_f^{e_H}, V_h^{e_H})$  est individuellement rationnel pour l'IMF et l'emprunteur, respectivement, si pour tout  $i \in \{f, h\}$  :

$$\mu \pi_f(V_f) + (1 - \mu) \pi_h(V_h) \geq 0, \quad (15)$$

$$U_i(V_i^{\beta_H}) \geq 0. \quad (16)$$

Un équilibre concurrentiel du marché du crédit avec information imparfaite est un menu de contrats  $(V_f^{\beta_H}, V_h^{\beta_H})$  tel que les contraintes de réalisabilité  $0 \leq c_i \leq W$ ,  $I_i(1 + r_i) \geq c_i$  et  $I_i \geq 0$  soient vérifiées pour  $i \in \{f, h\}$ , et la rationalité individuelle pour les IMF et les emprunteurs soit satisfaite. A cet équilibre, il n'existe aucun menu de contrats incitatifs  $(V_f, V_h)$  susceptibles de générer des profits espérés positifs à une IMF offrant un contrat  $(V_a^{\beta_H}, V_b^{\beta_H})$  en plus du contrat  $(V_f^{\beta_H}, V_h^{\beta_H})$ . Remarquons ici que le contrat de la proposition 1 n'est pas incitatif, puis que  $r_f < r_h$ , implique que les femmes et les hommes préfèrent le contrat  $V_f^{\beta_f^{**}}$  au contrat  $V_h^{\beta_h^{**}}$ . Ainsi, le contrat  $(V_f^*, V_h^*)$  ne peut pas être un contrat d'équilibre en information imparfaite. Dans la suite, nous allons déterminer les conditions qui garantissent l'existence d'un équilibre concurrentiel en information imparfaite. Tout contrat ayant la propriété  $c_i = W$  viole la contrainte de rationalité individuelle. La conséquence immédiate est que, la condition  $c_i < W$  pour tout  $i \in \{f, h\}$  doit être vérifiée à l'équilibre. La condition  $Y_f'(0) = Y_h'(0) = \infty$  assure que, un menu des contrats incitatifs  $(V_f, V_h)$  avec un investissement positif existe tel que  $(V_f, V_h)$  soit individuellement rationnel pour les emprunteurs et donne des profits espérés positifs à l'IMF qui l'offre. Le problème que nous considérons ici n'est donc pas trivial. Les contrats optimaux en information imparfaite peuvent donc être déterminés en utilisant les arguments traditionnels de la littérature sur le marché du crédit (Besanko et Thakor, 1987 ; Bester,

1987). En situation d'information asymétrique, le collatéral est utilisé comme un mécanisme séparateur (Besley et Coate, 1995 ; Besanko et Thakor, 1987; Bester, 1987; Chan et Thakor, 1987; Stiglitz et Weiss, 1981). Les emprunteurs à haut risque ont une forte préférence de ne pas payer un collatéral, parce qu'ils ont une forte probabilité d'avoir à le payer. Le rôle du collatéral comme mécanisme de séparation complète dépend de façon crucial de  $W$ , le niveau de la richesse de l'emprunteur.

Dans cette section, nous examinons les équilibres du marché lorsque la richesse des emprunteurs est suffisante pour permettre une séparation complète. Un contrat de crédit d'équilibre  $V_i^{\beta_H^{**}} = \{I_i^{**}, r_i^{**}, c_i^{**}\}$ ,  $i \in \{f, h\}$  est solution du programme suivant.

$$\text{Max}_{I_i, r_i, c_i, e_i} \mu[U_f(I_f, r_f, c_f, e_f)] + (1 - \mu)[U_h(I_h, r_h, c_h, e_h)]$$

S/C.

$$\{\gamma_H e_f [Y_f(I_f) - (1 + r_f)I_f + W] + \gamma_H (1 - e_f)(W - c_f) - \varphi(e_f)\} \tag{17a}$$

$$\geq \{\gamma_H e_f [Y_f(I_f) - (1 + r_h)I_h + W] + \gamma_H (1 - e_f)(W - c_h) - \varphi(e_f)\}$$

$$\{\gamma_H e_h [Y_h(I_h) - (1 + r_h)I_h + W] + \gamma_H (1 - e_h)(W - c_h) - \varphi(e_h)\} \tag{17b}$$

$$\geq \{\gamma_H e_h [Y_h(I_h) - (1 + r_f)I_f] + \gamma_H (1 - e_h)(W - c_f) - \varphi(e_h)\}$$

$$0 \leq e_i \leq 1, \quad i \in \{f, h\} \tag{17c}$$

$$0 \leq c_i \leq (1 + r_i)I_i, \quad i \in \{f, h\} \tag{17d}$$

$$e_i(1 + r_i)I_i + (1 - e_i)c_i = (1 + r_0)I_i \quad i \in \{f, h\} \tag{17e}$$

$$\gamma_H [Y_i(I_i) - (1 + r_i)I_i + c_i] - \varphi'(e_i) = 0 \quad i \in \{f, h\} \tag{17f}$$

Pour déterminer la solution de ce problème, nous allons considérer la situation dans laquelle les frais collatéraux sont inférieurs aux dotations finales des emprunteurs  $c_i^* < W$ .

**Proposition 2 :** Lorsque l'information est imparfaite sur le marché concurrentiel du crédit, les contrats optimaux sont caractérisés par les conditions suivantes :

$$c_f^{**} = \frac{(1 + r_0)[e_f I_h - e_h I_f]}{e_f - e_h},$$

$$c_h^{**} = 0$$

$$r_f^{**} = \frac{1 + r_0}{e_f} - \frac{(1 - e_f)}{e_f I_f} c_f^{**} - 1,$$

$$r_h^{**} = \frac{1+r_0}{e_h} - 1 \quad I_f^{**} = Y_f^{-1} \left( \frac{(1+r_0)[\gamma_H \mathbf{e}_f \mu + (\lambda_4 - \lambda_2)]}{(\mu \gamma_H \mathbf{e}_f + \lambda_4 \gamma_H) \gamma_H \mathbf{e}_f} \right),$$

$$I_h^{**} = Y_h^{-1} \left( \frac{\left( \frac{1-\mu}{\lambda_H \mathbf{e}_h} + \frac{\lambda_1}{\mathbf{e}_h} - \lambda_3 \frac{1}{\gamma_H \mathbf{e}_h} - \frac{\gamma_H \mathbf{e}_h}{\mathbf{e}_f} + \lambda_5 \frac{1}{\lambda_H \mathbf{e}_h} \right) (1+r_0)}{((1-\mu) \mathbf{e}_h + \lambda_5) \lambda_H} \right).$$

Les niveaux d'effort sont donnés par la condition suivante:

$$\phi'(\mathbf{e}_i) = \gamma_H \left[ Y_i(I_i^{**}) - (1+r_i^{**})I_i^{**} + \mathbf{c}_i^{**} \right].$$

**La preuve de cette proposition est donnée en annexe.**

Dans un marché du crédit concurrentiel, lorsque les risques ne sont pas mélangés, la condition de profit nul doit être vérifiée :  $\pi_f(V_f) = \pi_h(V_h) = 0$ . De plus, à l'équilibre, l'agent le plus risqué obtient le même contrat qu'en situation d'information parfaite, c'est-à-dire,  $V_h^{**} = V_h^*$ , et  $\mathbf{e}^{**}$  est solution de l'équation  $\phi'(\mathbf{e}_h) = Y_h(I_h^{**}) - (1+r_h^{**})$ . L'existence d'un équilibre séparateur peut être assuré en supposant qu'il existe une proportion suffisamment large des emprunteurs à haut risque, ou que la différence entre  $e_1 - e_2$  est assez large<sup>6</sup>.

**Corollaire 1 :** *Lorsque l'IMF propose un contrat avec accompagnement, le niveau d'effort de l'emprunteur est amélioré.*

**Preuve :** Elle découle de la proposition précédente. Le niveau optimal d'effort de l'emprunteur est linéaire avec le paramètre d'amélioration. Intuitivement, la formation dont bénéficie l'emprunteur valorise ce dernier qui réalise l'importance du rôle social assuré par l'IMF. De ce fait, il s'investit davantage dans le projet.

**Corollaire 2 :** *En information incomplète, lorsque l'IMF propose un contrat avec accompagnement, la probabilité de réussite du projet est améliorée par le facteur d'influence.*

**Preuve :** Elle découle de la proposition précédente. L'accompagnement assuré par l'IMF améliore l'effort mis en œuvre par les entrepreneurs dans la réalisation des projets. Puisque l'accompagnement fournit aux entrepreneurs des instruments de gestion qui améliorent leur capacité à piloter leurs projets, le risque d'échec est diminué.

Yunus (2007) indique que les pauvres n'ont pas toujours conscience de leurs compétences. S'ils se donnent les moyens de survivre, leur situation de précarité est liée à leur exclusion du marché des capitaux. Ainsi, l'octroi de crédit et l'accompagnement nécessaire dans la mise en œuvre du projet se révèlent sans aucun doute une arme indéniable contre la pauvreté. En l'absence d'accompagnement, le niveau du risque peut être mesuré par le niveau d'effort qui est inobservable ex-ante par l'IMF. Le rationnement qui en découle, engendre la pratique

<sup>6</sup> Cf. Rothschild et Stiglitz (1976) ou Besanko et Thakor (1987). Il n'y a aucun équilibre mélangeant sous les hypothèses de cette section.

de taux d'intérêt élevé et l'exclusion financière. Dans ces conditions, l'intervention de l'Etat peut réduire ces inefficacités.

### 2.3. Les contrats d'équilibre avec l'intervention de l'Etat

Dans la littérature économique, de nombreux travaux ont indiqué le rôle de l'Etat dans le développement économique et social. Ainsi, dans la lutte contre la pauvreté, l'Etat peut soutenir le développement de la microfinance en palliant aux inefficacités liées au rationnement dû au collatéral. Dans ce cadre, nous supposons que l'Etat peut fournir aux IMF la garantie requise pour le crédit, soit  $\rho_i$ , avec  $0 \leq \rho_i \leq I_i$ . Nous supposons que les garanties peuvent être d'un montant égal pour tous les demandeurs de crédits ( $\rho_f = \rho_h = \rho$ ) ou différent. En contrepartie de la garantie, les IMF versent au gouvernement tous les collatéraux collectés. Le coût net pour le gouvernement d'un défaut de remboursement d'un prêt est  $\rho_i - c_i$ ,  $c_i$  étant le collatéral exigé en présence de garantie. Mentionnons ici que le gouvernement est soumis aux mêmes contraintes informationnelles que les IMF face aux emprunteurs. Nous analysons les contrats dans le cadre d'un accompagnement.

Avec la garantie de prêts par le gouvernement, l'espérance d'utilité de l'emprunteur est toujours donnée par l'équation (11). La condition de profit nul pour les IMF est maintenant donnée par :

$$\lambda_i e_i (1 + r_i) I_i + \lambda_i (1 - e_i) \rho_i = (1 + r_0) I_i + K \quad (18)$$

La résolution du problème consiste donc à remplacer l'équation (17e) par l'équation (18) et les solutions de ce problème sont données par les propositions suivantes :

**Proposition 3 :** Lorsque le type d'emprunteur est une information privée et si  $W > c_f^*$ , l'équilibre d'un marché concurrentiel avec la garantie de prêts par l'Etat est caractérisé par les conditions suivantes :

$$c_f^{***} = \frac{(1 + r_0)[e_h I_f - e_f I_h]}{e_h (1 - e_f) \rho_f - (1 - e_h)}$$

$$c_h^{***} = 0$$

$$r_f^{***} = \frac{1 + r_0}{e_f} - \frac{(1 - e_f)}{e_f I_f} \rho_f - 1,$$

$$r_h^{***} = \frac{1 + r_0}{e_h} - 1,$$

$$I_f^{***} = Y_f^{-1} \left( \frac{(1 + r_0)[\gamma_H e_f \mu + (\lambda_4 - \lambda_2)]}{(\mu \gamma_H e_f + \lambda_4 \gamma_H) \gamma_H e_f} \right)$$

$$I_h^{***} = Y_h^{-1} \left( \frac{\left( \frac{1-\mu}{\lambda_H e_h} + \frac{\lambda_1}{e_h} - \lambda_3 \frac{1}{\gamma_H e_h} - \frac{\gamma_H e_h}{e_f} + \lambda_5 \frac{1}{\lambda_H e_h} \right) (1+r_0)}{((1-\mu)e_h + \lambda_5)\lambda_H} \right)$$

Les niveaux d'effort sont donnés par la condition suivante :

$$\phi'(e_i) = \gamma_H [ Y_i(I_i^{***}) - (1+r_i^{***})I_i^{***} + C_i^{***} ]$$

**Preuve :** Elle est jointe en annexe.

Dans la proposition (2), en l'absence de l'intervention de l'Etat, l'IMF reçoit respectivement  $c_f^*$  et 0 comme collatéral sur les prêts des emprunteurs de type  $f$  et  $h$ . On peut vérifier que si  $\rho_f = c_f^*$  et  $\rho_h = 0$ , l'équilibre de la proposition (2) se réduit à l'équilibre de la proposition (3). Seuls les taux de garantie élevés produisent un effet. Les résultats de la proposition (3) montrent que, lorsque la garantie augmente, le collatéral et le taux d'intérêt diminuent pour les femmes.

Pour éviter le rationnement, la politique naturelle du gouvernement est caractérisée par la probabilité  $\psi$  d'obtenir un prêt garanti par l'Etat étant donné qu'on ne peut pas obtenir un prêt privé et  $\rho_f$  le montant de la garantie de l'Etat. Le taux d'intérêt sur le prêt garanti, étant donnée la condition de profit nul, s'écrit :

$$r_g = \frac{1+r_0}{e_f} + \frac{K}{e_f I_f} - \frac{(1-e_f)}{e_f I_f} \rho_f - \frac{1}{e_f I_f} \quad (19)$$

On suppose donc que le gouvernement prélève  $W$  comme collatéral. Avec une telle politique, l'utilité de l'emprunteur à bas risque est donnée par :

$$U_f = \mu_f X_{ff} + (1-\mu_f)\psi_g X_{fg} \quad (20)$$

Le premier terme à droite de l'équation (20) représente la probabilité d'obtenir un prêt privé,  $\mu_f$ , multipliée par  $X_{ff}$  l'espérance d'utilité d'un emprunteur à bas risque lorsqu'il obtient un prêt privé d'un emprunteur à bas risque. Le second terme représente la probabilité d'obtenir un prêt garanti par l'Etat,  $(1-\mu_f)\psi_g$ , multipliée par l'espérance d'utilité de l'emprunteur à bas risque pour ce prêt.

Si  $\rho_f = W$ ,

alors  $X_{ff} = X_{fg} = \lambda_H e_f [Y_f(I_f) - (1+r_f)I_f + W] + \lambda_H (1-e_f)(W - c_f) - \phi(e_f)$  et il n'y a aucun gain d'obtenir un prêt du gouvernement plutôt qu'un prêt privé. Si  $\rho_f > W$ , alors  $X_{ff} > X_{fg}$ . La contrainte d'incitation (17b) s'écrit alors :

$$\mu_h \{ \lambda_H e_h [Y_h(I_h) - (1+r_h)I_h + W] + \lambda_H (1-e_h)(W - c_h) - \varphi(e_h) \} \tag{21}$$

$$\geq \mu_f X_{hf} + (1-\mu_f)\psi_g X_{hg}$$

où  $X_{hf} = \lambda_H e_h [Y_h(I_h) - (1+r_f)I_f] - \lambda_H (1-e_h)(W - c_f) - \varphi(e_h)$  est l'espérance d'utilité de l'emprunteur à haut risque qui prend un prêt privé moyen pour un emprunteur à bas risque, et  $X_{hg} = e_h [Y_h(I_h) - (1+r_g)I_f] - (1-e_h)(W - c_f) - \varphi(e_h)$  est l'espérance d'utilité de l'emprunteur à haut risque qui prend un prêt du gouvernement pour un emprunteur à bas risque. On obtient la proposition (4) suivante.

**Proposition 4 :** *Lorsque le type de l'emprunteur est une information privée, et  $W < C_f^*$ , l'équilibre avec garantie de l'Etat est caractérisé par les conditions suivantes :*

$$c_f^{****} = W$$

$$c_h^{****} = 0$$

$$\mu_f^{****} = \frac{e_h(Y_h(I_h) - (1+r_h)I_h + W - \mu_g X_{hg} - \varphi(e_h))}{X_{hg} - \mu_g X_{hg}} < 1$$

$$\mu_h^{****} = 1$$

$$r_f^{****} = \frac{1+r_0}{e_f} - \frac{(1-e_f)}{e_f I_f} W - 1$$

$$r_h^{****} = \frac{1+r_0}{e_h} - 1$$

$$I_f^{****} = Y_f'^{-1} \left( \frac{(1+r_0)[\gamma_H e_f \mu + (\lambda_4 - \lambda_2)]}{(\mu \gamma_H e_f + \lambda_4 \gamma_H) \gamma_H e_f} \right) \text{ et}$$

$$I_h^{****} = Y_h'^{-1} \left( \frac{\left( \frac{1-\mu}{\lambda_H e_h} + \frac{\lambda_1}{e_h} - \lambda_3 \frac{1}{\gamma_H e_h} - \frac{\gamma_H e_h}{e_f} + \lambda_5 \frac{1}{\lambda_H e_h} \right) (1+r_0)}{((1-\mu)e_h + \lambda_5)\lambda_H} \right)$$

**Preuve :** Elle est jointe en annexe.

Les prêts privés sont complétés par les prêts garantis par l'Etat pour certains emprunteurs à bas risque caractérisés par  $(p_g, r_g, W)$ . Les emprunteurs à haut risque obtiennent le même contrat et la même utilité que dans les propositions 2 et 3.

## CONCLUSION

Nous avons montré dans ce papier qu'en situation d'asymétrie d'information sur le marché de crédit, les établissements de crédit vont rationner les demandes de crédit. Le risque de crédit inhérent aux conditions de ces personnes peut être réduit par la proposition d'un contrat alternatif à travers lequel l'IMF offre une formation accompagnant le projet d'investissement. Ce type de contrat alternatif montre que l'IMF peut rentabiliser et se développer avec le processus de contrat de crédits avec accompagnement, les entrepreneurs peuvent réussir leurs projets avec la maîtrise du risque suite à la formation. Ce mécanisme facilite le remboursement du crédit et limite les problèmes sociaux. La sélection rigoureuse des projets et la mise à disposition des outils d'accompagnement, de mentorat, et de formation, facilitent l'accès au financement et conditionnent la réussite future du projet, elles contribuent également à l'inclusion financière, à l'augmentation de la productivité de l'IMF. Le contrat de microcrédit avec formation et accompagnement permet à de nombreux emprunteurs de réussir à développer des activités génératrices de revenus ou des projets d'avenir.

## RÉFÉRENCES

- Banerjee, A. ; Duflo, E. ; Glennerster, R. and Kinnan, C. (2015). 'The Miracle of Microfinance? Evidence from a Randomized Evaluation.' *American Economic Journal: Applied Economics*, 7(1): 22-53.
- Barry, A. and Bruno, O. (2008). 'Microcredit Supply in Developed Countries: The Role of Mentoring', Working Paper.
- Beck, T.; Klapper, L. and Mendoza, J. C. (2008). 'The Typology of Partial Credit Guarantee Funds around the World', The World Bank Development Research Group.
- Berge, L. I. O.; Bjorvatn, K.; Juniwaty, K. S. and Tungodden, B. (2012). 'Business training in Tanzania: From research driven experiment to local implementation', *Journal of African Economies*.
- Besley, T. and Coate, S. (1995). 'Group Lending, Repayment Incentives and Social Collateral', *Journal of Development Economics*, 46, 1: 1-18.
- Bester, H. (1987). 'The role of collateral in credit markets with imperfect information', *European Economic Review*, Elsevier, vol. 31(4), pages 887-899, June.
- Blondeau N., (2006). 'La microfinance. Un outil de développement durable ?', *Etudes*, 9, Tome 405, p. 188-198.
- Bruhn, M. and Bilal, Z. (2012). 'Stimulating Managerial Capital in Emerging Markets: The Impact of Business and Financial Literacy for Young Entrepreneurs', Mimeo. World Bank.
- Emran, S.- M.; Morshed, A. K. M. and Stiglitz, J. E. (2011). 'Micronance and Missing Markets' MPR Paper No. 41451.

- Guérin, I. (2009). 'Femmes et Microfinance, Espoirs et désillusions de l'expérience indienne', Editions des archives contemporaines.
- Guerin, I. ; Fouillet, C. Hillenkamp, I. ; Martinez, O. ; Morvant-Roux, S. et Roesch, M. (2007). 'Microfinance: effets mitigés sur la lutte contre la pauvreté', *Annuaire Suisse de politique de développement*, vol. 26, n°2 : 103-119.
- Hashemi, S., S. Schuler, and Riley, A. (1996). : 'Rural Credit Programmes and Women's Empowerment in Bangladesh.' *World Development* 24(4): 635-653.
- Karlan, Dean and Valdivia, M. (2011), 'Teaching entrepreneurship: Impact of business training on microfinance clients and institutions', *Review of Economics and Statistics* 93(2): 510-27.
- Labie, M.; Méon, P. M.; Mersland, R., Szafarz, A. (2010). 'Discrimination by Microcredit Officers: Theory and Evidence on Disability in Uganda', *Université Libre de Bruxelles CEB Working Papers* 10-007.
- McKenzie, D. and Woodruff, C. (2013). 'What are we learning from business training and entrepreneurship evaluations around the developing world?' *The World Bank Research Observer*.
- Morduch, J. (2000), 'The microfinance schism'. *World Development*, 28 (4): 617-629.
- Rahman A (1999), 'Micro-credit Initiatives for Equitable and Sustainable Development: Who pays?'. *World Development*, vol. 27, n°1 : 67-82.
- Servet, J-M. (2006) 'Banquiers aux pieds nus. La microfinance'. Paris: Éd. Odile Jacob.
- Valdivia, M. and Frisanchi, V. (2008), 'Business training for microfinance clients: how it matters and for whom? '. *PMMA Network Session Paper*.
- Yunus, M. (2007), 'Vers un nouveau capitalisme'. J-C Lattès, Paris.

**ANNEXES**

**Preuve Proposition 1 :** Dans chaque sous marché, le contrat d'équilibre maximise l'espérance d'utilité de l'emprunteur  $i$ , sous la contrainte de profit nul de l'IMF.

$$\begin{cases} \text{Max} U_i(I_i, r_i, c_i) \\ \text{s.c.} \\ e_i \gamma_i (1+r_i) I_i + (1-e_i) \gamma_i c_i = (1+r_0) I_i \\ (1+r_i) I_i \geq c_i \geq 0 \\ \gamma_i [Y_i(I_i) - (1+r_i) I_i + c_i] - \varphi'(e_i) = 0 \end{cases}$$

En substituant la condition de profit nul dans la fonction d'utilité de chaque agent  $i$ , on obtient le programme suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max}_{I_i, r_i, c_i} L^* &= e_i \left\{ Y_i(I_i) - \frac{I_i}{e_i} (1+r_0) + \frac{(1-e_i)}{e_i} c_i + W \right\} + (1-e_i)(W - c_i) - \varphi(e_i) \\ &+ \lambda_1 \left[ \frac{I_i}{e_i} (1+r_0) - \frac{1-e_i}{e_i} c_i - c_i \right] + \lambda_2 \left[ Y_i(I_i) - \frac{I_i}{e_i} (1+r_0) + \frac{1-e_i}{e_i} c_i + c_i - \varphi'(e) \right] \end{aligned}$$

Les conditions de premier ordre donnent les résultats

suivants:  $\frac{\partial L^*}{\partial c_i} = \lambda_1 \frac{1-2e_i}{e_i} + \lambda_2 \frac{1}{e_i} \leq 0,$

Ce qui implique que  $c_i^* = 0$ , et d'après la condition de profit nul, nous avons :

$$r_i^* = \frac{1+r_0}{e_i} - 1 = \frac{1+r_0 - e_i}{e_i}.$$

De plus,  $\left. \frac{\partial L}{\partial I_i} \right|_{c_i^* = 0} = e_i [Y'_i(I_i) - \frac{1+r_0}{e_i}] + \lambda_1 [\frac{1+r_0}{e_i}] + \lambda_2 [Y'_i(I_i) - \frac{1+r_0}{e_1}] = 0$

En fixant  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 > 0$ , on obtient :  $Y'_i(I_i) - \frac{1+r_0}{e_i} = 0$ , ainsi nous

avons  $I'_i = Y_i'^{-1}(\frac{1+r_0}{e_i})$

**Preuves Propositions 2:** La détermination des conditions d'équilibre suit une démarche commune. Lorsque l'information est asymétrique, l'équilibre du marché concurrentiel est

obtenu en maximisant la moyenne pondérée des espérances d'utilité des emprunteurs, donnée par :

$$\gamma U_f + (1 - \gamma) U_h, \quad (\text{A-1})$$

Sous les contraintes (17a)-(17f). En suivant la démarche de Besanko et Thakor (1987), la technique consiste à ignorer dans un premier temps les contraintes (17a) et on vérifie ensuite que la solution optimale satisfait (17a).

En substituant  $(1 + r_i)I_i$  par sa valeur de la contrainte de profit nul ( $E\pi = 0$ ),  $\frac{(1 + r_0)I_i - (1 - e_i)c_i}{e_i}$  dans la fonction objectif, on obtient le problème suivant (A-2):

$$\begin{aligned} \max_{I_f, r_f, c_f} L = & \mu \left( e_f \lambda_H \left[ Y_f(I_f) - \frac{I_f}{e_f} (1 + r_0) + \frac{1 - e_f}{e_f} c_f + W \right] + (1 - e_f)(W - c_f) - \phi(e_f) \right) \\ & + (1 - \mu) \left( \gamma_H e_h \left[ Y_h(I_h) - \frac{I_h(1 + r_0) + k}{\gamma_H e_h} + \frac{1 - e_h}{e_h} c_h + W \right] + \gamma_H (1 - e_h)(W - c_h) - \phi(e_h) \right) \\ & + \lambda_1 \left[ \gamma_H e_h (Y_h(I_h) - \frac{I_h}{e_h} (1 + r_0) + \frac{1 - e_h}{e_h} c_h + W) + \gamma_H (1 - e_h)(W - c_h) - \phi(e_h) - \gamma_H e_h (Y_h(I_h) - \frac{I_f}{e_f} (1 + r_0) + \right. \\ & \left. \frac{(1 - e_f)}{e_f} c_f + W) - \lambda_H (1 - e_h)(W - c_f) + \phi(e_h) \right] \lambda_2 \left[ \frac{I_f(1 + r_0) + k}{\gamma_H e_f} - \frac{1 - e_f}{e_f} c_f - c_f \right] + \lambda_3 \left[ \frac{I_h(1 + r_0) + k}{\gamma_H e_h} - \frac{1 - e_h}{e_h} c_h - c_h \right] \\ & + \lambda_4 \left[ \gamma_H (Y_f(I_f) - \frac{I_f(1 + r_0) + k}{\gamma_H e_f} + \frac{1 - e_f}{e_f} c_f + c_f) - \phi'(e) \right] + \lambda_5 \left[ \gamma_H (Y_h(I_h) - \frac{I_h(1 + r_0)}{\gamma_H e_h} + \frac{1 - e_h}{e_h} c_h + c_h) - \phi'(e_h) \right] \end{aligned}$$

où  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  et  $\lambda_5$  sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes du programme. En différenciant le Lagrangien par rapport à  $c_f$  on obtient :

$$\frac{\partial L}{\partial c_f} = -\lambda_1 \left( \frac{e_h - e_f}{e_f} \right) + \lambda_2 \left( \frac{1 - 2e_f}{e_f} \right) + \lambda_4 \left( \frac{1}{e_f} \right) \leq 0$$

En différenciant par rapport à  $c_h$ , on obtient :  $\frac{\partial L}{\partial c_h} = (-\lambda_3 + \lambda_5) \left( \frac{1}{e_h} \right) < 0$

Par conséquent,  $c_h^{***} = 0$ . En substituant  $c_h^{***}$  par sa valeur dans (17b) et en résolvant (17b) par rapport à  $c_f^{***}$  on obtient :  $c_f^{***} = \frac{[e_f I_h - e_h](1+r_0)}{e_f - e_h}$ . Etant donné  $c_i^{***}$ , pour  $i \in \{1,2\}$

la valeur de  $r_i^{***}$  peut être obtenue en utilisant la condition (17e). En dérivant le Lagrangien par rapport à  $I_i$ , on obtient les valeurs de  $I_f^{***}$  et  $I_h^{***}$ .

$$\frac{\partial L}{\partial I_f} = e_f \left[ \gamma_H Y'_f(I_f) - \frac{1+r_0}{\gamma_H e_f} \right] + \lambda_1 e_h \left[ \frac{1+r_0}{e_f} \right] + \lambda_2 \left( \frac{1+r_0}{\gamma_H e_f} \right) + \lambda_4 \left( \gamma_H Y'_f(I_f) - \frac{1+r_0}{\gamma_H e_f} \right) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_f} = \lambda_1 \left( e_h \frac{(1-e_f)}{e_f} + (1-e_h) \right) + \lambda_2 \left( \frac{1-e_f}{e_f} - 1 \right) - \lambda_3 \frac{1-e_f}{e_f} \leq 0, \quad (19)$$

avec  $c_f > 0$ ,  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$  et  $\lambda_3 \geq 0$ .